Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Sommersemester 2021

FSP-Teilprüfung: Mathematik TE

Datum: 07.06.2021

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, Bertram Heimes, StD. Werner Müller, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1 (Heimes)

Hinweis: Rechnen Sie jeweils auf drei Nachkommastellen genau!

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{13} \cdot e^{i \cdot 33{,}690°}$ und $z_2 = \sqrt{41} \cdot e^{i \cdot 231{,}340°}$.

a) Geben Sie z_1 und z_2 sowohl in trigonometrischer Form als auch in kartesischer Form an *(3 Punkte)*.

b) Geben Sie die Ergebnisse der folgenden Rechnungen jeweils in kartesischer Form an:

b1) $z_1 \cdot z_2$ *(1 Punkt)*, b2) $\frac{z_2}{z_1} + z_2$ *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $w^3 = z_2$, und zeichnen Sie diese in ein Diagramm *(4 Punkte)*.

Aufgabe 2 (Dr. Siebel)

a) Bestimmen Sie die linear-homogene Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten und der Lösung $f(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot i \cdot x} + c_2 \cdot e^{-4 \cdot i \cdot x} + c_3 \cdot e^x + c_4 \cdot x \cdot e^x$ *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $f''(x) - f'(x) = 5 \cdot x$ *(4 Punkte)*.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $f'(x) + f(x) = 2 \cdot e^x,\ f(1) = 1$ *(4 Punkte)*.

Aufgabe 3 (Dr. Siebel)

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an *(10 Punkte)*.
richtige Antwort: 1 Punkt falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$z = \left\|\sin(270°)\right\| \cdot e^{i \cdot 270°} \Leftrightarrow$			
	$z^3 = i$ ☐	$\bar{z} = 1$ ☐	$z^4 = -1$ ☐	$\bar{z} = -i$ ☐
b)	$\int_{-a}^{a} a dx = a$, falls $a = 0 \vee a =$			
	-1 ☐	$0{,}5$ ☐	1 ☐	2 ☐

c)	$\vec{a}=\begin{pmatrix}\cos(\pi)\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}\left\lvert\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i\right\rvert\\c\end{pmatrix}$ sind orthogonal für $c=$			
	0 ☐	$\sin(90°)$ ☐	e^0 ☐	$-\left\lvert e^{\pi\cdot i}\right\rvert$ ☐
d)	Für welche DGL ist $f_p(x)=A_1\cdot x^2+A_0\cdot x$ der Ansatz zur partikulären Lösung?			
	$f''(x)=-x$ ☐	$f''(x)-f'(x)=\sin(x)$ ☐	$f''(x)+2\cdot f'(x)=3\cdot x$ ☐	$f''(x)+f'(x)=e^x$ ☐
e)	$A=\begin{pmatrix}2&5\\-6&15\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. Was kann man hier nicht berechnen?			
	$A\cdot B$ ☐	$A^T\cdot B$ ☐	$B\cdot A$ ☐	$B^T\cdot A$ ☐
f)	Welche Funktion mit $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ hat eine doppelte Nullstelle?			
	$f(x)=x^2-2\cdot x+1$ ☐	$f(x)=e^x-2$ ☐	$f(x)=x^2-1$ ☐	$f(x)=\lvert x\rvert-1$ ☐
g)	Die Stammfunktion von $f(x)=\ln\left(x^2\right)$ $\mathbb{D}_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$ mit $c\in\mathbb{R}$ ist:			
	$\ln\left(x^2\right)+c$ ☐	$2\cdot\left[\ln(x)\cdot x-x\right]+c$ ☐	$\ln\left(x^2\right)\cdot x-x+c$ ☐	$\ln\left(x^2\right)\cdot x+c$ ☐
h)	Welcher der Punkte liegt nicht in $\varepsilon:-2\cdot x+y-e\cdot z=1$?			
	$M(-2\mid-2\mid 1/e)$ ☐	$M(-1\mid-1\mid 0)$ ☐	$M(1\mid 1\mid -2/e)$ ☐	$M(0\mid 0\mid -1)$ ☐
i)	Welche dieser Funktionen mit $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ ist ungerade?			
	$f(x)=\sin(x-\pi/2)$ ☐	$f(x)=1$ ☐	$f(x)=\cos(x-\pi/2)$ ☐	keine ☐
j)	$A=\begin{pmatrix}1&e\\-1&e^t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ hat keine Inverse für:			
	$t=0$ ☐	kein t ☐	alle t ☐	$t=1$ ☐

Aufgabe 4 (Heimes, Wilhelm)

a) Bestimmen Sie für $f(x)=\dfrac{2\cdot\ln(x)}{\sqrt{x}}$ den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f\subset\mathbb{R}$ sowie $f'(x)$ *(3 Punkte)*.

b) Prüfen Sie, ob folgende Funktion an der Stelle $x_0=-3$ stetig ist:

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+42\cdot x & x>-3\\ -4\cdot x^2+21\cdot x & x\leq -3\end{cases}\qquad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$$ *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie jeweils $f'(x)$:

c1) $f(x)=5\cdot x^2\cdot\cos(x)\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ *(1 Punkt),*

c2) $f(x)=\left[\sin(x)+2\cdot e^x\right]^3\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ *(1 Punkt).*

d) Ermitteln Sie sämtliche reellen und nicht-reellen Nullstellen von $f(x)=x^4-5\cdot x^2-36\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{C}$ *(3 Punkte).*

Aufgabe 5 (StD. Müller)

a) Stellen Sie eine Gerade $\mathcal{G}$ in Parameterdarstellung auf, die durch die beiden Punkte $A(1|1|5)$ und $B(0|3|7)$ geht *(1 Punkt).*

b) Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene ε auf, die durch die Punkte $C(11|0|1)$, $D(5|-2|3)$ und $E(2|1|6)$ geht. Formen Sie die Ebene dann in die Koordinatenform um *(3 Punkte).*

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von Gerade $\mathcal{G}$ und Ebene ε *(2 Punkte).*

d) Prüfen Sie, ob der Punkt $P(6|-9|-5)$ auf der Geraden $\mathcal{G}$ liegt *(1 Punkt).*

e) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $M(3|-4|5)$ von der Ebene ε auf drei Stellen genau *(3 Punkte).*

Aufgabe 6 (Wilhelm)

a) Bestimmen Sie alle gegebenenfalls vorhandenen reellen horizontalen und vertikalen Asymptoten von $f(x)=\dfrac{5\cdot(x-1)\cdot x}{x^2+4\cdot x+4}$ *(2 Punkte).*

b) Ermitteln Sie für $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot x^4+x\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ die Tangentengleichung an der Stelle $x_0=-1$ *(2 Punkte).*

c) Bestimmen Sie alle reellen Extrempunkte von $f(x)=(2-x)\cdot e^x\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ *(3 Punkte).*

d) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e \dfrac{6\cdot x+12}{x^2+4\cdot x}dx$ auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte).*